BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ

№1 Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası 2015

УДК 519.872

ЗАДАЧА УПРАВЛЕНИЯ ЗАПАСАМИ СИСТЕМЫ ОБСЛУЖИВАНИЯ С ОГРАНИЧЕННЫМ ОБЪЕМОМ СКЛАДА

С.А.БАГИРОВА

Бакинский Государственный Университет

aseva90@gmail.com

В работе изучена модель системы массового обслуживания встречных потоков. Модель задается с помощью двумерной цепи Маркова. Разработана система уравнений равновесия для стационарных вероятностей состояний и указан способ нахождения основных характеристик системы.

Ключевые слова: системы массового обслуживания, встречные потоки, цепь Маркова, стационарное распределение, задача управления запасами

В классических моделях систем массового обслуживания (СМО), как правило, предполагается, что они имеют неограниченные ресурсы (хотя ограниченное число каналов обслуживания) и потери заявок связаны лишь ограниченным количеством каналов и (или) мест для ожидания заявок. С другой стороны, в классических моделях управления запасами обычно не учитываются возможности образования очереди расходующих заявок (*p*-заявок). Вместе с тем, в реальных системах запасания ресурсов в СМО наряду с расходующими заявками, существуют и снабжающие заявки (*c*-заявки). Такие СМО в литературе получили название системы обслуживания с встречными потоками (ВП) [1-4].

Анализ литературы показал, что модели СМО с ВП недостаточно исследованы. Исходя из этого, здесь изучается модель СМО с ВП при достаточно общих предположениях относительно поведения разнотипных заявок.

Описание модели. Рассматривается следующая одноканальная СМО с ВП. Система имеет склад ограниченного объема Q. В эту систему поступает пуассоновский поток расходующих заявок (*p*-заявки) с интенсивностью λ_p. Для простоты изложения, предположим, что каждая заявка потребует ресурс единичного размера. Отпуск ресурсов осуществляется через единственный канал системы. Время обслуживания p-заявок является экспоненциально распределенной случайной величиной с параметром μ_p. Система прекращает отпуск ресурсов независимо от длины очереди заявок, когда их уровень опускается до величины $q, 0 \leq q \leq Q-1$. В этот момент система делает заказ на вышестоящий склад на поставку ресурсов; при этом с вероятностью $\alpha_q(i)$ поступают ресурсы объема $i, 1 \leq i \leq Q-q$. При этом выполняется следующее соотношение:

$$0 \leq \alpha_q(i) \leq 1; \sum_{i=1}^{Q-q} \alpha_q(i) = 1 \ \forall q.$$

Сделанный заказ выполняется не мгновенно, а с некоторой задержкой, вызванной доставкой и выгрузкой ресурсов в склад данной системы, эта задержка распределена экспоненциально с параметром ν, который не зависит от объема поставки. Из-за технологических ограничений в период времени выгрузки ресурсов их отпуск заявкам прекращается.

Предполагается, что p-заявки являются нетерпеливыми. Иными словами, p-заявка, поступившая в момент, когда уровень ресурсов в складе равен q с вероятностью $\beta(q)$ присоединяется к очереди, и ожидают там до поступления пополнения, а с дополнительной вероятностью $1-\beta(q)$ не присоединяется к очереди, т.е. уходит из системы (теряется). С другой стороны, нетерпеливость p-заявок проявляется и в очереди. Это означает следующее: стоящие в очереди p-заявки не имеют информацию об уровне ресурсов в складе и если до начало их обслуживания уровень запасов опустился до значения q, то с вероятностью $\gamma(i)$ ровно i заявок из очереди покидают систему, $i = 0,1,\ldots,n-1$, где n текущая длина очереди p-заявок, при этом

$$\sum_{i=0}^{n-1} \gamma(i) = 1.$$

Максимальная длина очереди p-заявок может быть равна N, т.е. p-заявка, поступившая в момент, когда в системе уже имеются N таких заявок, независимо от уровня запасов ресурсов теряется с вероятностью 1.

Замечание. Данная модель является обобщением модели, которая ранее была изучена в работе [3]. Действительно, из нее при $\beta(q) = 1$ и $\gamma(0) = 1$ получается указанная модель.

Задача состоит в определении характеристик данной модели. При этом основными характеристиками являются средняя длина очереди p-заявок (L_{av}), средний уровень ресурсов в складе (Q_{av})и вероятность потери p-заявок (PB_p).

Решение задачи. Функционирования данной СМО с ВП описывается двумерной цепью Маркова (ЦМ) с состояниями вида (m,n), где m - уровень ресурсов в складе, n - число *p*-заявок в системе. Фазовое пространство состояний (ФПС) этой ЦМ определяется так:

$$S = \{(m,n): m = q, q+1, \dots, Q;\ n = 0,1,\dots,N\}. \quad (1)$$

Интенсивность перехода из состояния $(m_1,n_1)\in S$ в состояние $(m_2,n_2)\in S$ обозначим через $\theta((m_1,n_1),(m_2,n_2))$.

Рассмотрим проблемы определения элементов производящей матрицы данной цепи Маркова. С этой целью определим возможные переходы между состояниями модели в ФПС (1). Эти переходы связаны с двумя типами событий: (i) с поступлением *p*-заявок и завершением их обслуживания и (ii) с поступлением *c*-заявок и завершением их обслуживания.

Пусть система находится в некотором состояние $(m,n)\in S$. В начале рассмотрим возможные выходы из этого состояния при $m > q$. Если поступает некоторая *p*-заявка и канал системы свободен, то она немедленно принимается для обслуживания; иначе при выполнении условии $n < N$, поступившая *p*-заявка присоединяется к очереди. Иными словами, в обоих случаях осуществляется переход из данного состояния в состояние $(m,n+1)\in S$. Интенсивность такого перехода равна λ_p. Если в исходном состоянии выполняется условие $n = N$, то поступившая *p*-заявка теряется. Пусть теперь в исходном состоянии $(m,n)\in S$ выполняется условие $m = q$. Тогда поступившая *p*-заявка с вероятностью $\beta(q)$ присоединяется к очереди, и таким образом, осуществляется переход в состояние $(q,n+1)\in S$. Интенсивность такого перехода равна $\lambda_p\beta(q)$.

После завершения обслуживания *p*-заявки в исходном состоянии $(m,n)\in S, n>0, m>q+1,$ осуществляется переход в состояние $(m-1,n-1)\in S$. Интенсивность такого перехода равна μ_p. Если в исходном состоянии $(q+1,n)\in S, n>1,$ после завершения обслуживания *p*-заявки из системы уходят *i* заявок данного типа, то осуществляется переход в состояние $(q,n-1-i)\in S$. Интенсивность такого перехода равна $\mu_p\gamma(i), i = 0,1,\dots,n-1$.

В момент поступления заказа объема $i, 1\le i\le Q-q,$ осуществляется переход из исходного состояния $(q,n)\in S$ в состояние $(q+i,n)\in S$; интенсивность этого перехода равна $\nu\alpha_q(i)$.

Резюмируя сказанное, можно построить таблицу 1, согласно которой определяются возможные выходы из состояния $(m,n) \in S$.

Таблица 1

Возможные выходы из состояния $(m,n) \in S$

Следующее состояние	Условие перехода	Интенсивность перехода
$(m,n+1)$	$m > q, n < N$	λ_p
$(q,n+1)$	$m = q, n < N$	$\lambda_p \beta(q)$
$(m-1,n-1)$	$m > q+1, n > 0$	μ_p
$(q,n-1-i)$	$m = q+1, n > 1$	$\mu_p \gamma(i)$
$(q+i,n)$	$m = q$	$\nu\alpha_q(i)$

Теперь рассмотрим возможные входы состояние $(m,n) \in S$. При этом следует различить два случая: 1) $m > q$; 2) $m = q$. В первом случае в данное состояние можно попасть из состояния $(m,n-1) \in S$ с интенсивностью λ_p. Во втором случае интенсивность такого перехода равна $\lambda_p \beta(q)$. В обоих случаях переход возможен, если в исходном состоянии выполняется условие $n > 0$. В указанное состояние можно попасть из состояния $(m+1,n+1)$ с интенсивностью μ_p, если в исходном состоянии выполняются условия $m > q, n > 0$. И наконец, в состояние $(m,n) \in S$ можно попасть из состояния $(q+1,n+1+i)$ с интенсивностью $\mu_p \gamma(i)$, если в конечном состоянии выполняются условия $m = q, n+i < N$.

Резюмируя сказанное, можно построить таблицу 2, согласно которой определяются возможные входы в состояние $(m,n) \in S$.

Таблица 2

Возможные входы в состояние $(m,n) \in S$

Предыдущее состояние	Условие перехода	Интенсивность перехода
$(m,n-1)$	$m > q, n > 0$	λ_p
$(q,n-1)$	$m = q, n > 0$	$\lambda_p \beta(q)$
$(m+1,n+1)$	$m > q, n < N$	μ_p
$(q+1,n+1+i)$	$m = q, n+i < N$	$\mu_p \gamma(i)$

Интенсивность перехода из состояния $(m_1,n_1)\in S$ в состояние $(m_2,n_2)\in S$ обозначим через $\theta((m_1,n_1),(m_2,n_2))$. Тогда, используя таблицы 1 и 2, получаем, что указанные параметры определяются так:

$$\theta((m_1,n_1),(m_2,n_2)) =$$
$$\begin{cases} \lambda_p, & \text{если } m_1 \neq q, m_2 = m_1, n_2 = n_1+1, n_1 \leq N-1, \\ \lambda_p\beta(q), & \text{если } m_1 = q, m_2 = m_1, n_2 = n_1+1, \\ \mu_p, & \text{если } m_1 > q+1, m_2 = m_1-1, n_2 = n_1-1, n_1 > 0, \\ \mu_p\gamma(i), & \text{если } m_1 = q+1, m_2 = q, n_2 = n_1-1-i, i = 0,1,\dots,n_1-1, \\ \nu\alpha_q(i), & \text{если } m_1 = q, m_2 = q+i, n_2 = n_1, i = 1,\dots,Q-q, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \quad (2)$$

С учетом соотношений (2) можно показать, что в этой системе существует стационарный режим. Пусть $p(m,n)$ означает стационарную вероятность состояния $(m,n)\in S$. Эти вероятности удовлетворяют систему уравнений равновесия (СУР). Она составляется на основе соотношений (2) и имеет следующий вид:

$$\Big(\lambda_p I(m>q,n<N) + \lambda_p\beta(q)I(m=q,n>0) + \mu_p I(m>q+1,n>0) + \mu_p\sum_{i=1}^{n-1}\gamma(i)\,I(m=q+1,n>1) + \nu\alpha_q(i)I(m=q)\Big)p(m,n) = \lambda_p p(m,n-1)I(m>q,n>0) + \lambda_p\beta(q)p(q,n-1)I(m=q,n>0) + \mu_p p(m+1,n+1)I(m+1,n+1) + \mu_p\gamma(i)p(q+1,n+1+i)I(m=q,n+i<N). \quad (3)$$

Здесь $I(A)$ означает индикаторную функцию события A. К этой СУР добавляется условие нормировки:

$$\sum_{(m,n)\in S} p(m,n) = 1. \quad (4)$$

После нахождения стационарных вероятностей состояний можно вычислить усредненные характеристики исследуемой СМО с ВП. Так, средняя длина очереди p-заявок (L_{av}) и средний уровень ресурсов в складе (Q_{av}) определяются как математические ожидания соответствующих случайных величин. Иными словами, эти параметры определяются из следующих формул:

$$L_{av} = \sum_{n=1}^{N} n\sum_{m=q}^{Q} p(m,n); \quad (5)$$

$$Q_{av} = \sum_{m=q}^{Q} m \sum_{n=1}^{N} p(m,n). \quad (6)$$

Потеря *p*-заявок происходят в следующих случаях: (1) в момент поступления такой заявки в очереди отсутствует свободное место; (2) в момент поступления такой заявки уровень ресурсов опустился до критического уровня q, но, несмотря на то, что в очереди имеется свободное место, заявка теряется; (3) до начало обслуживания *p*-заявка уровень ресурсов опустился до критического уровня q. Следовательно, для вычисления вероятности потери *p*-заявок (PB_p) получим следующую формулу:

$$PB_p = \sum_{m=q}^{Q} p(m,N) + \sum_{n=0}^{N} p(q,n)\big(1-\beta(n)\big) + \sum_{n=2}^{N} p(q+1,n). \quad (7)$$

Таким образом, разработан точный метод для вычисления характеристик изучаемой модели СМО с встречными потоками. Относительно решения СУР (3), (4) отметим, что с учетом структуры ее матрицы целесообразно использовать итеративный метод Гаусса-Зейделя.

Заключение. Здесь предложен точный метод для определения характеристик модели СМО с ВП. Он является эффективным для применения в системах с умеренными значениями объема склада и максимальной длины очереди *p*-заявок. Вместе с тем, в реальных системах указанные величины принимают достаточно большие значения, и в связи с этим размерность ФПС (1) становится чрезмерно большой. Это обстоятельство делает проблематичным точное вычисление стационарного распределения цепи. Поэтому приходится ограничиваться приближенными вычислениями стационарного распределения и характеристик системы. С этой целью можно использовать алгоритмы фазового укрупнения состояний двумерных цепей Маркова [5]. Эти задачи являются объектами исследования последующих публикаций.

ЛИТЕРАТУРА

1. Постан М.Я. Применение марковских процессов для моделирования систем обслуживания встречных транспортных потоков // Препринт № 88-6. Институт Кибернетики НАН Украины. Киев, 1989, 14 с.
2. Меликов А.З., Молчанов А.А. Оптимизация процесса запасания ресурсов в системах транспортно-складского типа // Кибернетика и системный анализ. 1992, №3, с. 179-184.
3. Меликов А.З. Марковская модель процесса накопления в системах транспортно-складского типа // Электронное моделирование. 1996, т.18, №6, с. 79-83.
4. Меликов А.З., Фаталиева М.Р. Управление запасами систем обслуживания разнотипных встречных потоков с учетом текущей ситуации // Электронное моделирование. 1997, т.19, №6, с. 106-115.
5. Ponomarenko L., Kim C.S., Melikov A. Performance Analysis and Optimization of Multi-Traffic on Communication Networks. Springer, 2010.

MƏHDUD HƏCMLİ ANBARI OLAN XİDMƏT SİSTEMİNİN EHTİYATLARININ İDARƏ EDİLMƏSİ MƏSƏLƏSİ

S.Ə.BAĞIROVA

XÜLASƏ

İşdə qarşılaşan selləri olan kütləvi xidmət sisteminin modeli tədqiq olunmuşdur. Model ikiölçülü Markov zənciri vasitəsilə təsvir olunmuşdur. Onun stasionar paylanmasının tapılması üçün balans tənlikləri sistemi yaradılmışdır və əsas xarakteristikalarının tapılması üsulu verilmişdir.

Açar sözlər: kütləvi xidmət sistemi, qarşılaşan axınlar, Markov zənciri, stasionar paylanma, ehtiyatların idarə edilməsi

ON THE PROBLEM OF THE INVENTORY CONTROL IN THE QUEUEING SYSTEM WITH FINITE STORE

S.A.BAGHIROVA

SUMMARY

The paper studies the model of queuing system with countering traffics. The model is represented by two-dimensional Markov chains. The system of balance equations for steady-state probabilities is developed. A method to calculate the main characteristic of the system is proposed.

Key words: queuing system, countered flow, Markov chain, stationary distribution, inventory control

Принято в редакцию: 24.12.2014 г.
Подписано к печати: 20.04.2015 г.